Universidad Nacional de Asunción Lic. en Ciencias Informáticas Facultad Politécnica

Algoritmos de Ordenamiento

Prof. Ing. Derlis Zárate ProfDerlisZarate@gmail.com

Contenido

- Introducción
- Bubble sort
- Insertion sort
- Selection sort
- Shellsort
- Mergesort
- Quicksort

- Qué es la ordenación?
- El problema de la ordenación consiste en ordenar una secuencia de registros de tal forma que los valores de sus claves formen una secuencia no decreciente.
- Esto es, dados los registros r₁, r₂, . . . , r_n, con valores de clave k₁, k₂, . . . , k_n, respectivamente, debemos producir la misma secuencia de registros en orden r_{i1}, r_{i2}, . . . , r_{in},

tal que
$$k_{i1} \le k_{i2} \le \cdots \le k_{in}$$

- Algunos algoritmos de ordenación pueden ejecutarse sobre el mismo array a ordenar (in-place), con el uso de al menos O(1) memoria adicional (ejemplo: número fijo de variables locales).
- Otros algoritmos en cambio requieren el uso de un segundo array de tamaño equivalente al array a ordenar (requiriendo $\mathbf{O}(n)$ memoria adicional).
- Por cuestiones de eficiencia, se prefieren los del primer tipo.

 Los diferentes algoritmos de ordenación pueden clasificarse de acuerdo al tipo de operaciones que realizan:



- Selección ··· □ □ ···
- Mezcla
- Distribución

- Así como también pueden clasificarse según el esquema de implementación en relación a la forma de acceder al array:
 - Algoritmos Iterativos
 - Algoritmos Recursivos

• El tiempo de ejecución de los algoritmos de ordenación que estudiaremos caen en alguna de estas categorías:

$$\mathbf{O}(n \log(n)) \quad \mathbf{O}(n^2)$$

- También existen algoritmos de ordenación O(n)
- El tiempo de ejecución del algoritmo puede cambiar significativamente en base al escenario considerado.

- Si la cantidad de datos a ordenar puede almacenarse y manejarse en la memoria principal de la computadora, decimos que la ordenación realizada es del tipo *interna*.
- En cambio si la cantidad de datos a ordenar es muy grande y los registros están almacenados en el disco, decimos que la ordenación realizada es del tipo externa.

Bubble Sort

- Repasando un poco, revisaremos el método de ordenación conocido como Bubble Sort (burbuja), el cual es cuadrático.
- Suponiendo que tenemos un array de datos desordenados:
 - Comenzando en el inicio del array, recorremos el mismo, encontramos el mayor elemento y lo movemos a la última posición.
 - En cada iteración subsecuente, encontramos el siguiente elemento mayor y lo movemos hacia "arriba" en el array.

Bubble Sort

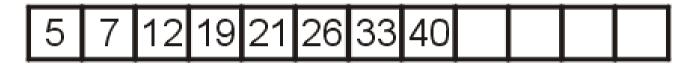
- Comenzando con el primer item del array, asumimos que es el mayor elemento.
- Lo comparamos con el segundo item:
 - Si el primero es mayor, los intercambiamos,
 - Sino, asumimos que el segundo item es el mayor
- Continuamos hasta el fin del array ya sea realizando intercambios entre items adyacentes o redefiniendo el item mayor.
- Este proceso se repite n-1 veces.

Bubble Sort

- Existen variantes que mejoran el bubble sort, pero las alternativas siguen siendo cuadráticas.
- Ahora veremos varias alternativas mejores.

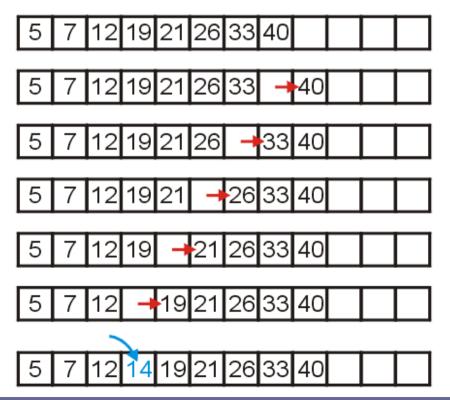
- Consideremos las siguientes observaciones
 - Una lista de 1 elemento está ordenada.
 - En general, si tenemos una lista ordenada de k elementos, podemos insertar un nuevo elemento para crear una lista ordenada de tamaño k+1.

• Por ejemplo, si consideramos el siguiente array ordenado con k=8 entradas



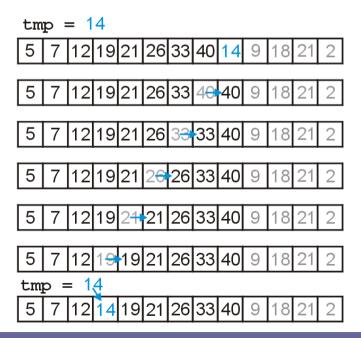
 Queremos insertar el 14 en este array de manera que la lista siga ordenada.

- Comenzando al final del array, si el número es mayor que 14, copiarlo a la derecha
- Una vez que se encuentre un elemento menor que 14, insertar el elemento en la vacancia resultante, así:



- Para cualquier lista desordenada
 - Tratar al primer elemento como una lista ordenada de tamaño k = 1
- Luego, dada la lista ordenada de tamaño k
 - Insertar el (k+1)th elemento en la lista ordenada
 - La lista ordenada ahora es del tamaño k+1

- Para evitar hacer el swap en las asignaciones, podemos almacenar el siguiente elemento en una variable temporal:
 - Esto reduce la asignación en un factor de 3
 - Acelera el algoritmo en un factor de 2



• El tiempo de ejecución promedio es

$$\mathbf{O}(I+n)$$

- Donde I es la cantidad de inversiones del array.
- Una inversión en un array consiste en un par de elementos almacenados en i < j, tal que a[i] > a[j].
- Cada swap realizado por el algoritmo corrije 1 inversión del array.

- Una lista aleatoria puede tener $I = \mathbf{O}(n^2)$ inversiones (por la cantidad de combinaciones posibles)
- Sin embargo, el algoritmo puede ejecutarse en tiempo
 O(n) si:
 - Solo un pequeño número de elementos están ubicados fuera de posición, y
 - Los elementos restantes quedarán a pocos lugares de su posición actual.

- Beneficios del algoritmo
 - Fácil de implementar
 - Incluso en el peor caso, es rápido para entradas pequeñas

Tamaño	Tiempo							
	Aproximado							
64	8000 ns							
32	2700 ns							
16	750 ns							
8	175 ns							

- Desventajas del algoritmo
 - No es bueno para ordenar grandes entradas de datos.
 - Ordenar una lista aleatoria de tamaño $2^{23} \approx 8~000~000$ requerirá aproximadamente 1 día.
 - Si doblamos este tamaño de entrada, se cuadruplica el tiempo requerido.

Selection Sort

- Es un algoritmo O(n²)
- Es simple y fácil de implementar, pero ineficiente para listas de tamaño grande.
- En promedio, mejor que el bubble sort pero peor que el insertion sort.

Selection Sort

- Su funcionamiento es el siguiente:
 - Buscar el mínimo elemento de la lista
 - Intercambiarlo con el primer elemento
 - Buscar el mínimo en el resto de la lista
 - Intercambiarlo con el segundo elemento
- Y en general:
 - Buscar el mínimo elemento entre una posición i y el final de la lista
 - Intercambiar el mínimo con el elemento de la posición i

Selection Sort

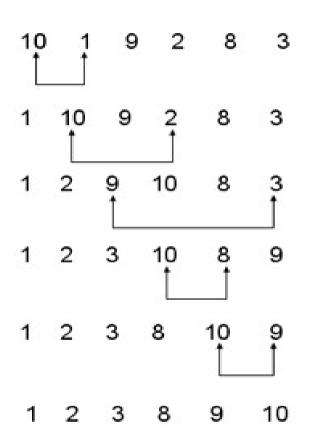
Swap entre el 10 y 1

Swap entre el 10 y 2

Swap entre el 9 y 3

Swap entre el 10 y 8

Swap entre el 10 y 9



- Propuesto por Donald Shell en 1959.
- Fue el 1^{er} algoritmo en romper la barrera cuadrática, pero recién varios años después se demostró un tiempo sub-cuadrático.
- Shellsort trabaja comparando elementos que están distantes en vez de comparar elementos que están adyacentes en el array a ordenar.

- Utiliza una secuencia h₁, h₂, ..., h_t llamada la secuencia de incremento.
- Puede utilizarse cualquier secuencia de incremento, con tal que h₁ = 1
- Algunas secuencias de incremento dan mejor resultado que otras.

- El algoritmo realiza múltiples pasadas sobre la lista y ordena conjuntos de igual tamaño utilizando insertion sort.
- Mejora la eficiencia del insertion sort al desplazar rápidamente los valores a sus destinos.

- El algoritmo también es conocido como ordenación por disminución de intervalos.
- La distancia entre comparaciones va decreciendo mientras el algoritmo se ejecuta, hasta que en la última fase, los elementos adyacentes son comparados.

- Después de cada fase y cierto incremento h_k, para cada i, tenemos que a[i] ≤ a [i + h_k]
- Todos los elementos espaciados en una distancia h_k están ordenados.
- Se dice que la lista está h_κ ordenada.

- La ventaja del shell sort es que es eficiente para tamaños de listas moderados.
- Para listas de tamaño grande, el algoritmo no es la mejor opción.
- Es el más rápido de los algoritmos cuadráticos.
- En promedio, aproximadamente 5 veces más rápido que el bubble sort y casi 2 veces más rápido que el insertion sort.

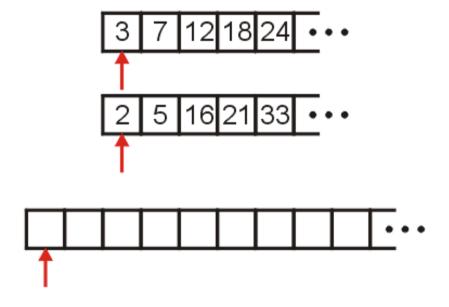
- La desventaja del shell sort es que su eficiencia no es tan buena como el merge sort o quick sort.
- Por más que sea más lento que dichos algoritmos, es relativamente simple, lo cual lo hace una alternativa válida para ordenar listas de tamaño menor o igual a 5000 elementos.
- También es una buena elección para ordenar listas pequeñas.

- El tiempo de ejecución del shell sort depende de la selección adecuada de la secuencia de incrementos.
- Existen algunas propuestas conocidas.

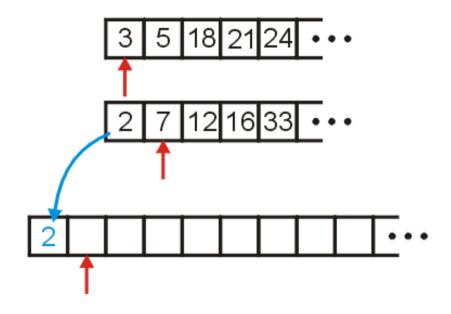
Original	32	95	16	82	24	66	35	19	75	54	40	43	93	68	
After 5-sort	32	35	16	68	24	40	43	19	75	54	66	95	93	82	6 swaps
After 3-sort	32	19	16	43	24	40	54	35	75	68	66	95	93	82	5 swaps
After 1-sort	16	19	24	32	35	40	43	54	66	68	75	82	93	95	15 swaps

- Es un algoritmo de ordenación que se define recursivamente.
- No tiene caso peor ni caso mejor, en todos los casos es O (n log n)
- Suponga que:
 - Se divide una lista desordenada en 2 sublistas y,
 - Se ordena cada una de las sublistas
- Qué tan rápido podemos recombinar las 2 sublistas en una única lista ordenada?

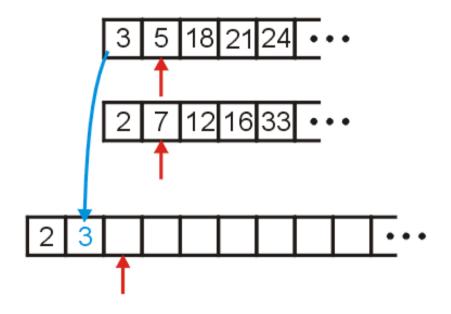
- Considere 2 arrays ordenados y 1 array vacío
- Definamos 3 índices al inicio de cada array



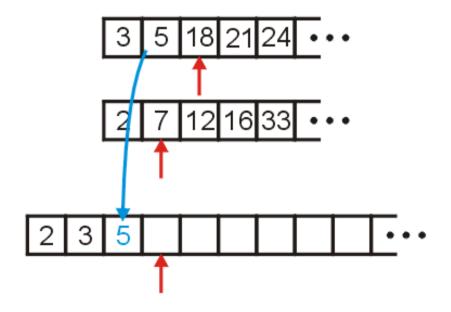
- Comparamos el 2 y el 3: 2 < 3
- Copiamos el 2 abajo
- Incrementamos los índices correspondientes



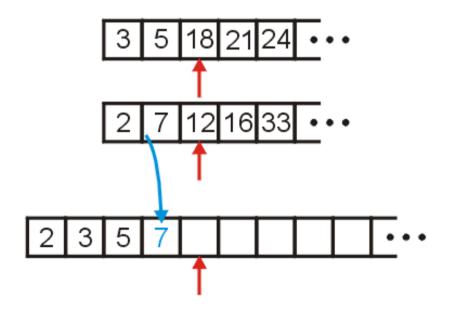
- Comparamos 3 y 7
- Copiamos el 3 abajo
- Incrementamos los índices



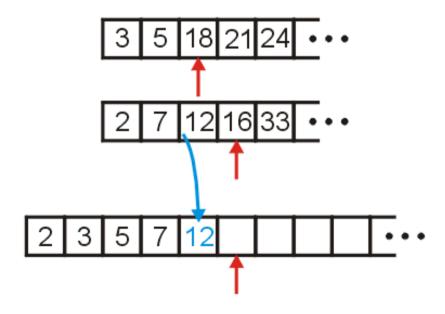
- Comparamos 5 y 7
- Copiamos el 5 abajo
- Incrementamos los índices



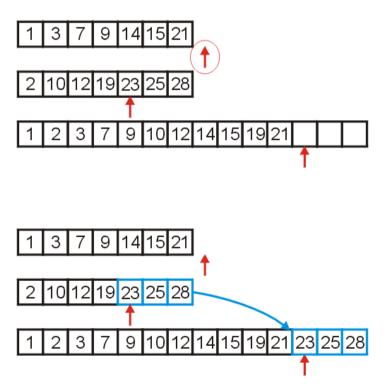
- Comparamos 7 y 18
- Copiamos el 7 e incrementamos índices



- Comparamos 12 y 18
- Copiamos el 12 e incrementamos



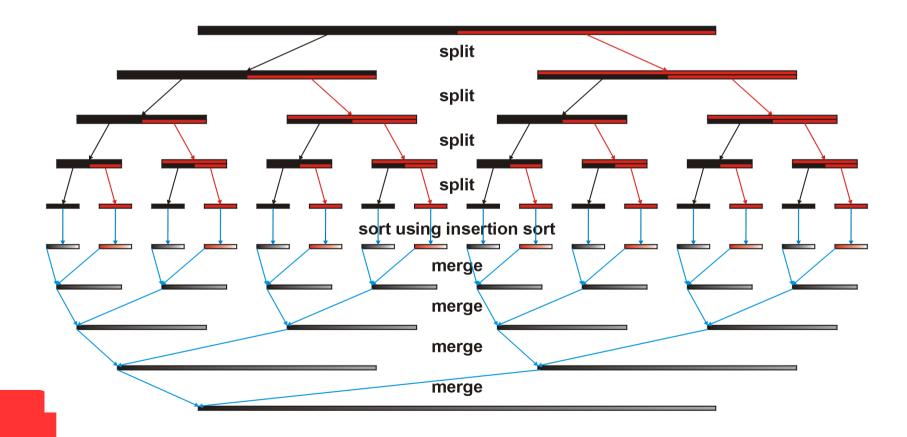
 Podemos continuar así hasta terminar de recorrer 1 de los arrays y en ese caso, simplemente copiamos los elementos restantes del otro array, al array vacío



- Entonces, el algoritmo de mezcla puede ejecutarse en tiempo O(n)
- Pregunta:
 - Partimos la lista en 2 sublistas y las ordenamos
 - Pero ¿cómo ordenamos las 2 sublistas?
- Respuesta (teórica):
 - Si el tamaño de estas sublistas es > 1, usar merge sort de nuevo.
 - Si el tamaño de las sublistas es 1, no hacer nada, una lista de 1 elemento está ordenada.

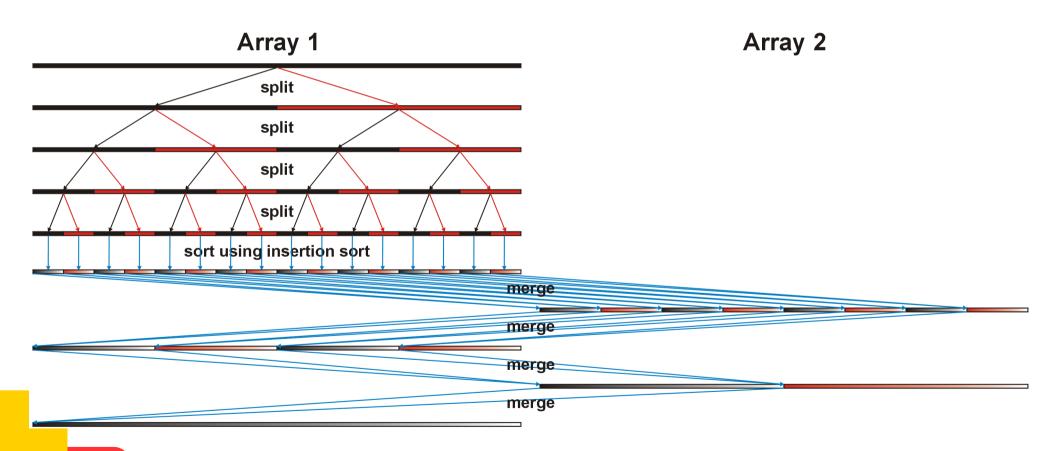
- Sin embargo, el hecho que el algoritmo tenga excelentes propiedades asintóticas no significa que es aplicable a todos los niveles.
- Por ello, la respuesta práctica a la pregunta anterior es:
 - Si el tamaño de las sublistas son menores a un límite establecido, usar un algoritmo como el de insertion sort para ordenar los elementos.
 - De lo contrario, usar merge sort de nuevo.

• Una interpretación gráfica del merge sort podría ser:



- Detalles importantes del algoritmo:
 - Si la lista es impar, se divide en 2 sublistas de tamaño aproximado, una par y otra impar.
 - Cada mezcla requiere un array adicional
 - Aunque puede minimizarse el uso de la memoria requerida utilizando 2 arrays, partiendo y ordenando en uno de ellos y mezclando los resultados entre los 2 arrays.

Interpretación gráfica usando 2 arrays

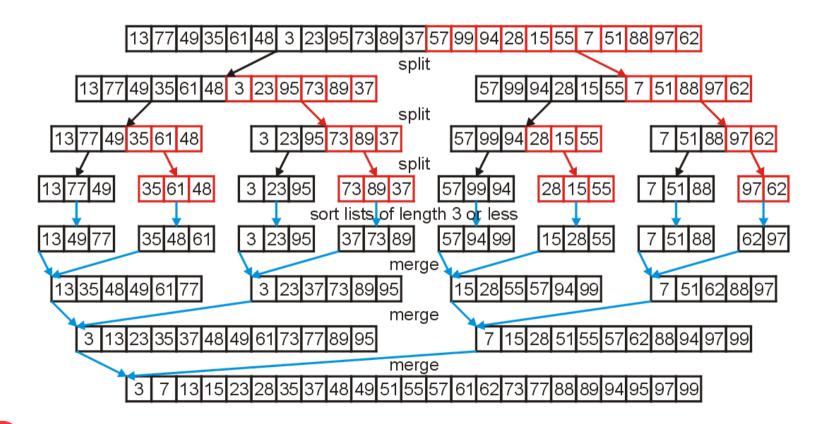


 Consideremos la siguiente lista de números desordenados

13 77 49 35 61 48 3 23 95 73 89 37 57 99 94 28 15 55 7 51 88 97 62

Y ordenemos la misma usando merge sort

Aplicando el algoritmo tenemos:



- Ya estudiamos un algoritmo de ordenación cuyo tiempo es O(n log(n)):
 - Merge sort, el cual es más rápido que los anteriores pero requiere más memoria adicional.
- Ahora conoceremos al Quick Sort.

- Propuesto por C.A. Hoare en 1962
- Costo del Quicksort:
 - Este algoritmo, tiene un costo promedio de $O(n \log(n))$, sin embargo el peor caso es $O(n^2)$
- Existen modificaciones al algoritmo para evitar este peor caso.

- El Mergesort trabaja partiendo el problema en 2 subproblemas y resolviendo cada subproblema.
- El problema más grande es partido en 2 subproblemas basados en la posición en el array.
- Consideremos la siguiente alternativa:
 - Elegir un elemento del array y partir los elementos restantes en 2 grupos relativos al elemento seleccionado.

Por ejemplo, dado

```
80 38 95 84 99 10 79 44 26 87 96 12 43 81 3
```

Podemos seleccionar al elemento 44, y ordenar los elementos restantes en 2 grupos: los menores que 44 y los mayores a 44:

```
38 10 26 12 43 3 44 80 95 84 99 79 87 96 81
```

 Si ordenamos cada sublista, entonces ya tendremos ordenado el array completo.

- Así como en el mergesort, podemos:
 - Aplicar insertion sort si el tamaño de las sublistas es suficientemente pequeño, o
 - Ordenamos las sublistas utilizando usando quick sort

- Si asumimos que la selección del pivote resulta en 2 particiones iguales (o aproximadamente iguales), entonces podríamos usar el mismo análisis usado para el mergesort
- Desafortunadamente, que pasa si siempre elegimos el menor elemento como pivote?

Mediana de Tres

- La elección ideal del pivote consiste en elegir el elemento mediano de la lista.
- Este elemento es difícil de encontrar, entonces
 - Elegimos la mediana entre los elementos que están al inicio, mitad y final de la lista



 Esto usualmente nos da una buena aproximación a la mediana actual de la lista



Mediana de Tres

- Ordenar los elementos basados en el 44, resulta en 2 sublistas, cada una de las cuales debe ser ordenada de nuevo usando quicksort.
- Seleccionamos el 26 para partir la primera sublista



Y 81 para partir la segunda sublista:

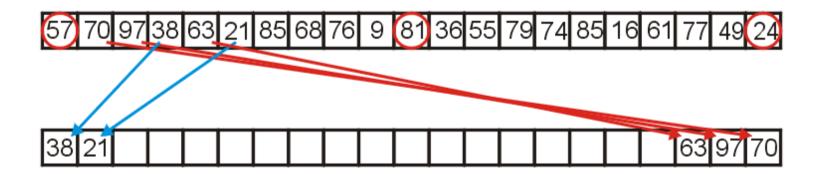


Mediana de Tres

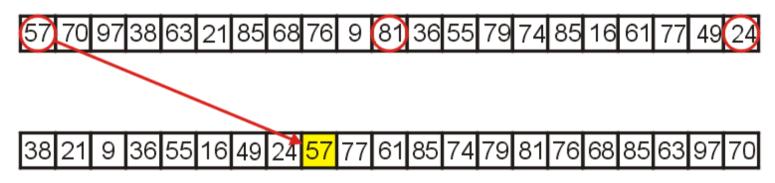
- La selección del pivote usando la mediana de tres, ayuda a acelerar el algoritmo.
- Una mala elección del pivote nos lleva al peor caso cuadrático.

- Si elegimos utilizar memoria adicional para un segundo array, podemos implementar el particionamiento de la lista copiando elementos hacia el inicio o final del array auxiliar
- Finalmente, ubicamos al pivote en la posición vacía resultante.

- Por ejemplo, consideremos lo siguiente:
 - 57 es la mediana de tres
 - Recorremos los elementos restantes, asignandolos al inicio o fin de la lista del segundo array

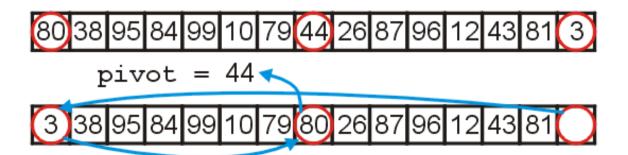


 Una vez finalizado, copiamos el pivote en la posición vacía resultante.



¿Podemos usar el quicksort sin un array adicional?

- Al buscar el pivote por la mediana de tres, ya examinamos el primer, medio y último elemento de la lista.
- Adicionalmente, podríamos:
 - Mover al elemento más pequeño en la primera posición
 - Mover el elemento más grande en la mitad de la lista



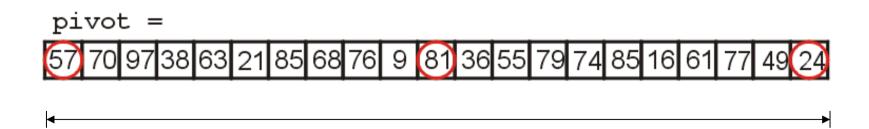
- Y luego, podemos encontrarnos con 2 tipos de elementos:
 - Mayores que el pivote
 - Menores que el pivote

Los cuales están desordenados

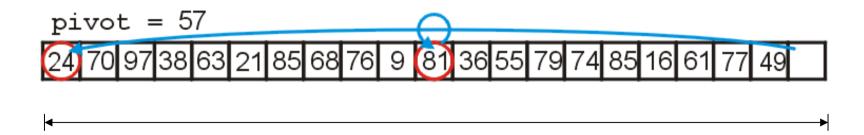
- Entonces, buscamos hacia adelante en la lista hasta encontrar un elemento mayor que el pivote y luego,
- Buscamos hacia atrás desde el final de la lista hasta encontrar un elemento menor que el pivote.
- Intercambiamos estas 2 entradas

- Podemos repetir este proceso hasta que los índices se crucen y ahí se detiene la búsqueda
- El índice que apunta el mayor elemento después del cruce, puede utilizarse para mover al elemento almacenado allí a la última posición de la lista
- Y luego, en la posición donde estaba el mayor elemento referenciado por el índice, podemos ubicar al pivote.
- Así, el pivote ya quedará en su ubicación correcta en el array

- Examinemos el concepto con un ejemplo concreto.
 Consideremos la lista de abajo
- Primero, examinamos los elementos ubicados al inicio, final y mitad de la lista
- La línea de abajo del array de ejemplo indica cuál lista está siendo ordenada.



- Seleccionamos el 57 como pivote.
- Movemos el 24 en la primera posición.
- El 81 permanece en su lugar en este caso.

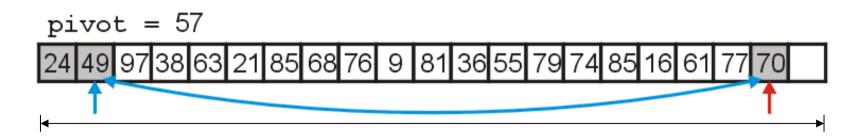


- Comenzando desde la 2^a y 2^a-última posiciones:
 - Buscamos hacia adelante hasta que encontramos 70 > 57
 - Buscamos hacia atrás hasta que encontramos 49 < 57

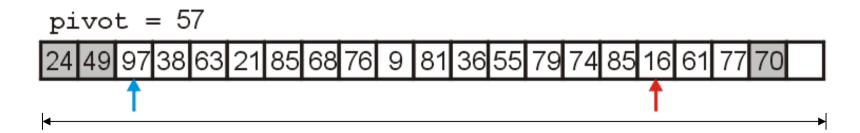
```
pivot = 57

24 70 97 38 63 21 85 68 76 9 81 36 55 79 74 85 16 61 77 49
```

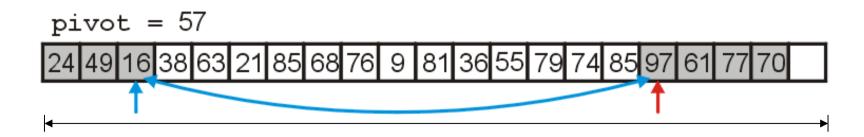
Intercambiamos 70 y 49, ubicándolos en orden



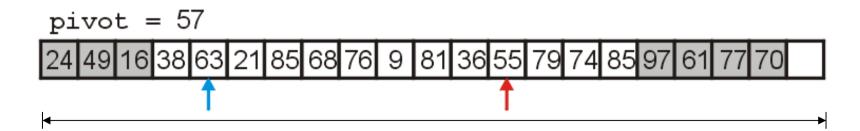
- Buscamos hacia adelante hasta 97 > 57
- Buscamos hacia atrás hasta 16 < 57



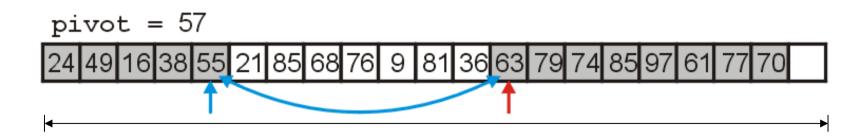
Intercambiamos 16 y 97



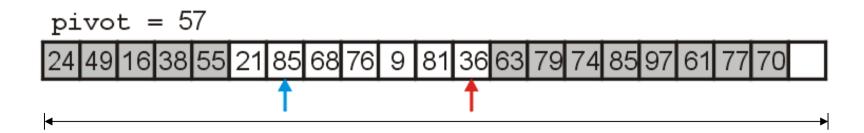
- Buscamos hacia adelante hasta 63 > 57
- Buscamos hacia atrás hasta 55 < 57



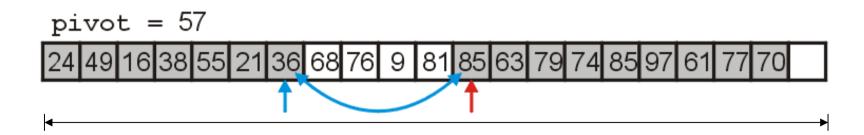
Intercambiamos 63 y 55



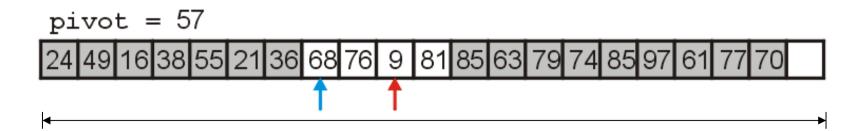
- Buscamos hacia adelante hasta 85 > 57
- Buscamos hacia atrás hasta 36 < 57



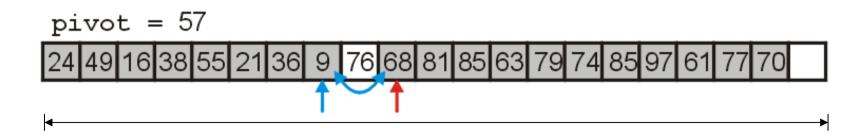
 Intercambiamos 85 y 36, ubicándolos en orden uno respecto al otro



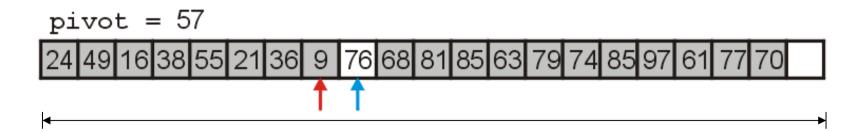
- Buscamos hacia adelante hasta 68 > 57
- Buscamos hacia atrás hasta 9 < 57



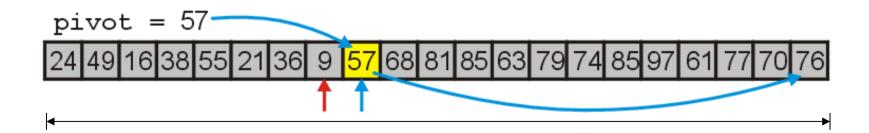
• Intercambiamos 68 y 9



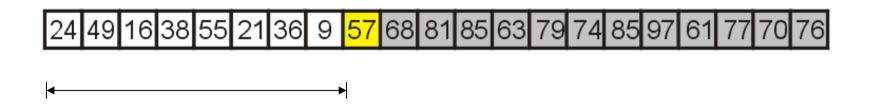
- Buscamos hacia adelante hasta encontrar 76 > 57
- Buscamos hacia atrás hasta encontrar 9 < 57
- Los índices están cruzados (fuera de orden) así que paramos



- Movemos el mayor elemento indexado a la posición vacía al final del array
- La nueva posición vacía es completada son el pivote, 57.
- El pivote ahora está en su ubicación correcta.



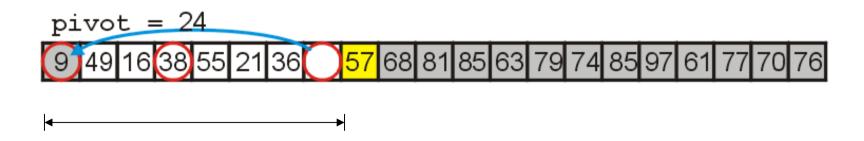
- Ahora, recursivamente llamamos a quick sort para que ordene la primera mitad de la lista
- Cuando termine, todos los elementos < 57 quedarán ordenados.



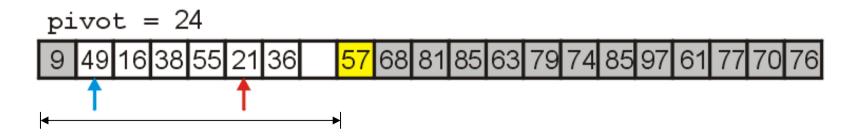
 Examinamos los elementos ubicados en las posiciones: primero, último y mitad.

```
pivot = 24 49 16 38 55 21 36 9 <mark>57</mark> 68 81 85 63 79 74 85 97 61 77 70 76
```

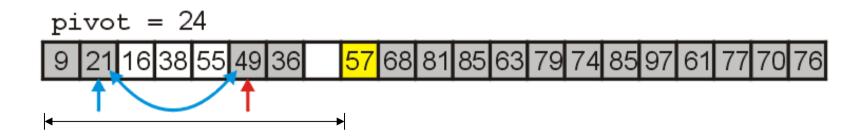
- Elegimos 24 como pivote.
- Movemos 9 en la primera posición de la sublista.



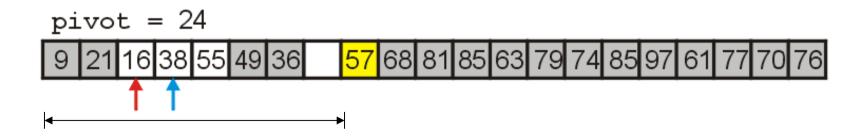
- Buscamos hacia adelante hasta 49 > 24
- Buscamos hacia atrás hasta 21 < 24



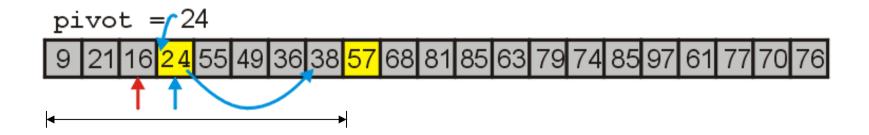
Intercambiamos 49 y 21



- Buscamos hacia adelante hasta 38 > 24
- Buscamos hacia atrás hasta 16 < 24
- Los índices están cruzados, así que paramos.



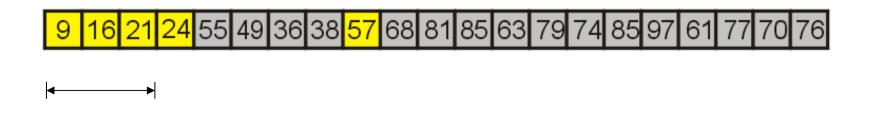
- Movemos el 38 a la posición vacía al final de la sublista y movemos el pivote 24 en la posición donde previamente estaba el 38
- El elemento 24 está ahora en su ubicación correcta.



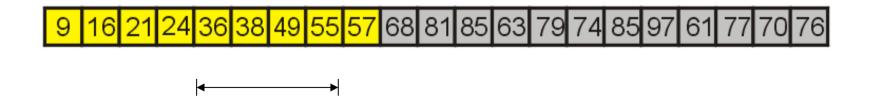
 Recursivamente llamaremos al quick sort para ordenar las sublistas izquierda y derecha, de los elementos que son menores que 57

9 21 16 <mark>24</mark> 55 49 36 38 <mark>57</mark> 68 81 85 63 79 74 85 97 61 77 70 76

 La primera partición tiene 3 entradas, las ordenamos usando insertion sort

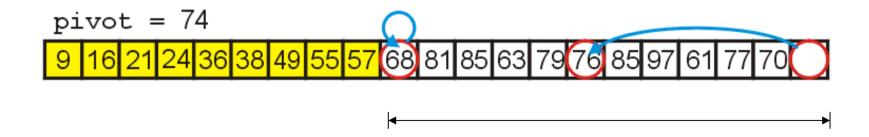


- La segunda partición tiene solo 4 entradas, así que también las ordenamos usando insertion sort.
- Luego ordenamos la lista derecha ubicada luego del elemento 57.



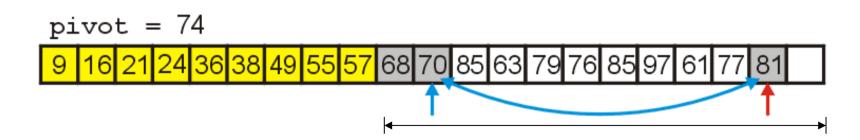
• Examinamos elementos buscando el pivote

- Elegimos al 74 como pivote
- Movemos al 76 a la posición donde estaba el 74



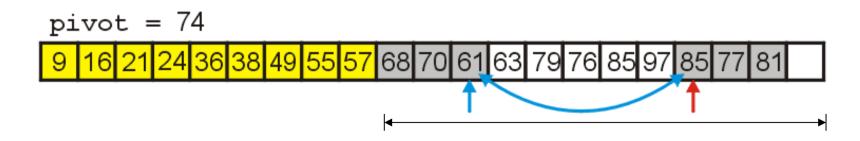
- Buscamos hacia adelante hasta 81 > 74
- Buscamos hacia atrás hasta 70 < 74

Intercambiamos 70 y 81



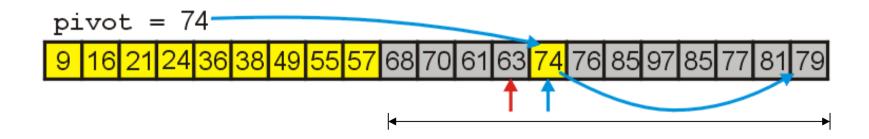
- Buscamos hacia adelante hasta 85 > 74
- Buscamos hacia atrás hasta 61 < 74

Intercambiamos 85 y 61

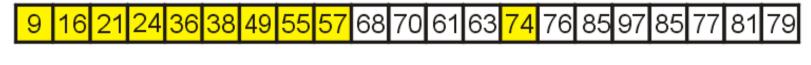


- Buscamos hacia adelante hasta 79 > 74
- Buscamos hacia atrás hasta 63 < 74
- Los índices se han cruzado, así que paramos.

- Movemos al 79 en la posición vacía al final de la lista y luego movemos al pivote 74 en la posición ocupada previamente por el 79
- El 74 está ahora en su ubicación correcta.

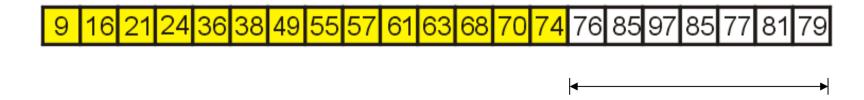


 Ordenamos la sublista izquierda con insertion sort porque sólo tiene 4 elementos





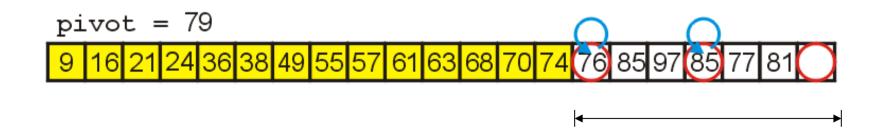
Luego ordenamos la sublista derecha.



Examinamos elementos para seleccionar al pivote

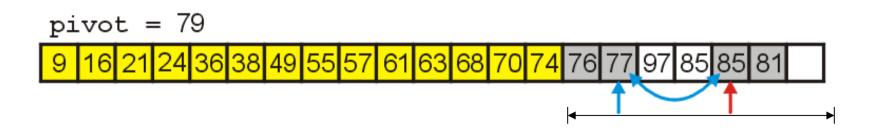
```
pivot = 9 16 21 24 36 38 49 55 57 61 63 68 70 74 76 85 97 85 77 81 79
```

- Elegimos al 79 como pivote y movemos:
 - 76 a la menor posición
 - 85 en la mayor posición



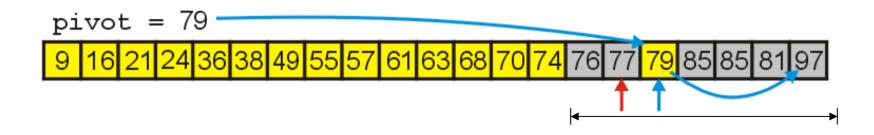
- Buscamos hacia adelante hasta 85 > 79
- Buscamos hacia atrás hasta 77 < 79

Intercambiamos 85 y 77



- Buscamos hacia adelante hasta 97 > 79
- Buscamos hacia atrás hasta 77 < 79
- Los índices están invertidos así que paramos.

 Finalmente 97 va a la posición vacía al final de la lista y el 79 se ubica en su posición correcta.

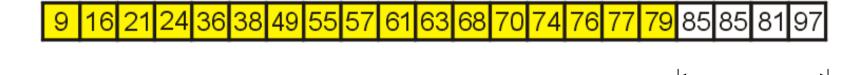


- Esto genera 2 sublistas de tamaño 2 y 4 respectivamente.
- Usamos insertion sort en la primera sublista.





 Usamos insertion sort en la segunda sublista, porque tiene solo 4 entradas



 Al ordenar la última sublista, tenemos la lista completa ordenada.

9 16 21 24 36 38 49 55 57 61 63 68 70 74 76 77 79 81 85 85 97

Otros algoritmos de ordenación?

- En cuanto a los algoritmos de ordenación estudiados, hay otros más dispersos por el mundo.. bastante eficientes y famosos, algunos inclusive lineales en ciertos contextos...
 - HeapSort
 - BucketSort
 - RadixSort
 - BinSort
 - BrickSort
 - CombSort
 - ... entre otros ...

Referencias

- Estructuras de Datos en Java. Mark Allen Weiss, Capítulos 1, 8 y 20.
- A Practical Introduction to Data Structures and Algorithm Analysis. Shaffer, Cap. 8
- Algoritmos y Estructuras de Datos. Alfred Aho. Cap. 8
- Data Structures and Algorithm Analysis. Mark Allen Weiss
- ECE 250 Data Structures and Algorithms, University of Waterloo. Douglas Wilhelm Harder

Gracias por su Atención

¿Consultas?